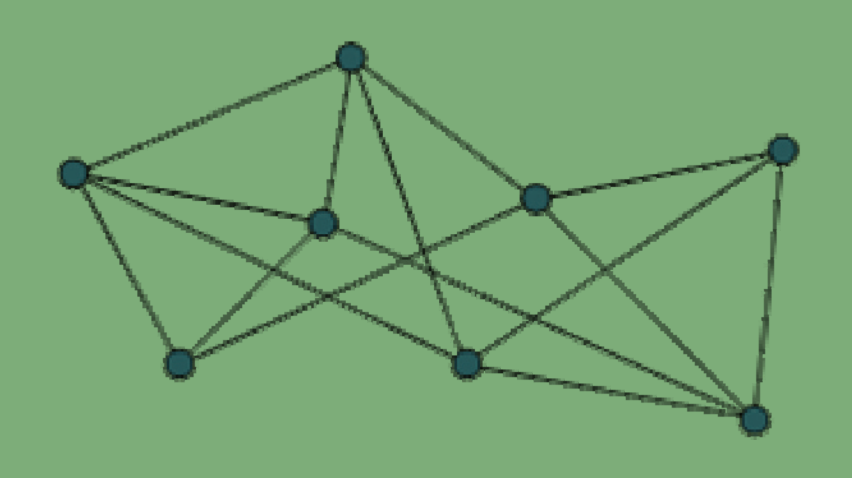
PROBLEMAS DE MATEMÁTICA DISCRETA:

TEORÍA DE NÚMEROS, COMBINATORIA, RELACIONES DE RECURRENCIA Y GRAFOS

por

JAVIER RODRIGO HITOS
DANILO MAGISTRALI



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-89-02

PROBLEMAS DE MATEMÁTICA DISCRETA:

TEORÍA DE NÚMEROS, COMBINATORIA, RELACIONES DE RECURRENCIA Y GRAFOS

por

JAVIER RODRIGO HITOS
DANILO MAGISTRALI

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-89-02

C U A D E R N O S

D E L   I N S T I T U T O

J U A N   D E   H E R R E R A

NUMERACIÓN

2 Área
51 Autor
09 Ordinal de cuaderno (del autor)

TEMAS

1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN
0 VARIOS

Problemas de matemática discreta: teoría de números, combinatoria, relaciones de recurrencia y grafos..

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestión y portada: Almudena Gil Sancho.
CUADERNO 394.01 / 3-89-02
ISBN-13 (obra completa): 978-84-9728-449-3
ISBN-13: 978-84-9728-451-6
Depósito Legal: M-7443-2013

Índice

Introducción

En este cuaderno se proponen problemas y relativas soluciones de matemáticas discretas relativos a los siguientes temas.

- En el tema 1 la teoría elemental de números.
- En el tema 2 aplicaciones del análisis combinatorio.
- En el tema 3 relaciones de recurrencias.
- En el tema 4 se proponen enunciados de problemas relativos a teoría de grafos.

TEMA 1: **TEORÍA ELEMENTAL DE NÚMEROS**

Contenidos:

Aritmética Entera:

1.- División euclídea.

2.- Sistemas de numeración. Notación posicional.

3.- Números primos y compuestos. Teorema fundamental de la Aritmética.

4.- Máximo común divisor. Algoritmo de Euclides. Teorema de Bezout.

5.- Mínimo común múltiplo.

Aritmética Modular:

6.- Congruencias. Propiedades.

7.- Ecuaciones de congruencias. Teorema chino de los restos.

8.- Aplicaciones.

Objetivos:

-Adquirir destrezas en el razonamiento aritmético.

-Manejar con soltura conceptos relacionados con la divisibilidad en los números enteros, para introducir la relación de congruencia.

-Resolver ecuaciones de congruencias.

-Expresar un número en distintas bases.

Bibliografía básica:

Los contenidos teóricos corresponden al capítulo 1 del libro de *Matemática Discreta* de Félix García Merayo.

PROBLEMAS

1.- a) Encontrar 100 números consecutivos que no sean primos. (Indicación: utilizar el factorial de un número adecuado).

b) Encontrar n números consecutivos que no sean primos, para cualquier $n \in N$. (Indicación: utilizar el factorial de un número adecuado).

2.- Usar el algoritmo de Euclides para encontrar $d = (a, b)$ y encontrar todos los $s, t \in Z$ tales que $d = s\,a + t\,b$ en los siguientes casos: a) $a = 56$, $b = 27$; b) $a = 721$, $b = 448$.

3.- Comprobar si los números 12, -5, -17, 15, 14, -7 forman un sistema completo de residuos módulo 6.

4.- Calcular el resto de dividir 2^{4k} entre 5.

5.- Hallar los divisores comunes a 300, 420, y 720. Ordenarlos de menor a mayor.

6.- Hallar: $2^{-1}(11)$; $7^{-1}(15)$; $7^{-1}(16)$; $5^{-1}(13)$; $111^{-1}\ (250)$

7.- Resolver las siguientes ecuaciones de congruencias si es posible:

a) $3\,x \equiv 9\,(15)$

b) $8\,x \equiv 2\,(10)$

c) $5\,x \equiv 7\,(15)$

d) $2154\,x \equiv 2422\ \ (2423)$

8.- Encontrar todos los números de la forma $5\,k + 9$ que sean múltiplos de 11.

9.- Solucionar el sistema de congruencias $\left.\begin{array}{l} x \equiv 2\,(4) \\ x \equiv 3\,(7) \\ x \equiv 5\,(9) \end{array}\right\}$.

10.- a) Escribir en la representación usual (base 10) los siguientes números:

2002_{11}, 1231_7, 1231_5.

b) Hallar la representación en las bases 2, 7 y 11 de los siguientes números expresados en base 10: 562, 2002.

11.- Entre 3 grupos de personas se reparten 4 bolsas iguales de aperitivos. Se sabe:

-el primer grupo tiene 5 personas, se reparten 2 bolsas y sobra un aperitivo.

-el segundo grupo tiene 6 personas, se reparte 1 bolsa y sobran 2 aperitivos.

-el tercer grupo tiene 7 personas, se reparte 1 bolsa y sobran 3 aperitivos.

Hallar el posible número de aperitivos de cada bolsa, sabiendo que no llegan a 500.

Soluciones problemas tema 1

4.- Calcular el resto de dividir 2^{4k} entre 5

Solución

Se cumple que $2^4 = 16 \equiv 1(5)$, por lo que $2^{4k} \equiv 1^k = 1(5)$, y entonces el resto de dividir 2^{4k} entre 5 es 1.

5.- Hallar los divisores comunes a 300, 420, y 720. Ordenarlos de menor a mayor

Solución

Factorizando, tenemos que $300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$, $420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$, $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$.

Los divisores comunes de la forma p^a, con p primo y $a \geq 0$, son 1, 2, 3, $2^2 = 4$, 5.

Los productos de éstos para primos distintos también son divisores comunes, luego los restantes divisores comunes son 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

6.- Hallar: $2^{-1}(11)$; $7^{-1}(15)$; $7^{-1}(16)$; $5^{-1}(13)$; $111^{-1}\ (250)$

Solución

Para hallar $2^{-1}(11)$, hay que hallar un $a \in Z$, con $0 \leq a < 11$, tal que $2\,a \equiv 1(11)$. Probando queda que $2\,6 = 12 \equiv 1(11)$, luego $6 = 2^{-1}(11)$.

Para hallar $7^{-1}(15)$, hay que hallar un $a \in Z$, con $0 \leq a < 15$, tal que $7\,a \equiv 1(15)$. Probando queda que $7\,13 = 91 \equiv 1(15)$, luego $13 = 7^{-1}(15)$.

Para hallar $7^{-1}(16)$, hay que hallar un $a \in Z$, con $0 \leq a < 16$, tal que $7\,a \equiv 1(16)$. Probando queda que $7\,7 = 49 \equiv 1(16)$, luego $7 = 7^{-1}(16)$.

Para hallar $5^{-1}(13)$, hay que hallar un $a \in Z$, con $0 \le a < 13$, tal que $5\,a \equiv 1(13)$. Probando queda que $5\,8 = 40 \equiv 1(13)$, luego $8 = 5^{-1}(13)$.

Para hallar $111^{-1}(250)$, hay que hallar los coeficientes de Bezout de 250, 111: Tenemos que $250 = 2 \times 111 + 28$, $111 = 3 \times 28 + 27$, $28 = 27 + 1$, por lo que

$1 = 28 - 27 = 4 \times 28 - 111 = 4 \times 250 - 9 \times 111$, y entonces un inverso de 111 módulo 250 es -9, por lo que $111^{-1}(250) = -9 + 250 = 241$

7.- Resolver las siguientes ecuaciones de congruencias si es posible:

d) $2154\,x \equiv 2422\ \ (2423)$

Solución

Hacemos $(2154, 2423)$ utilizando el algoritmo de Euclides: $\left.\begin{array}{l} 2423 = 2154 + 269 \\ 2154 = 8 \times 269 + 2 \\ 269 = 2 \times 134 + 1 \end{array}\right\}$.

Entonces $(2154, 2423) = 1$, por lo que habrá una única solución módulo 2423, que será $x \equiv 2154^{-1}\ 2422\,(2423)$. Para hallar $2154^{-1}(2423)$, encontramos los enteros s, t tales que $s\,2154 + t\,2423 = 1$. Para ello, despejamos en las ecuaciones anteriores de abajo a arriba y queda

$$1 = 269 - 2 \times 134 = 269 - (2154 - 8 \times 269) \times 134 = (8 \times 134 + 1)269 - 134 \times 2154 = 1073(2423 - 2154) - 134 \times 2154 =$$
$$= 1073 \times 2423 - 1207 \times 2154$$

Por tanto $2154^{-1}(2423) = -1207 + 2423 = 1216$, por lo que la solución es

$x \equiv 1216 \times 2422 = 2945152 \equiv 1207\,(2423)$.

8.- Encontrar todos los números de la forma $5\,k + 9$ que sean múltiplos de 11

Solución

Como $5k+9\equiv 9\equiv 4(5)$, los x que nos piden tienen que cumplir el sistema $\left.\begin{array}{l} x\equiv 4(5) \\ x\equiv 0(11)\end{array}\right\}$. La segunda ecuación tiene como solución $x=11s$, luego la primera queda

$11s\equiv 4(5)\Leftrightarrow s\equiv 4(5)$, y entonces $s=5t+4$, por lo que $x=55t+44$, $t\in Z$.

9.- Solucionar el sistema de congruencias $\left.\begin{array}{l} x\equiv 2(4) \\ x\equiv 3(7) \\ x\equiv 5(9)\end{array}\right\}$.

Solución

Como 4, 7 y 9 son primos dos a dos, la solución única módulo 4 7 9=252 es $x\equiv 2\,7\,9\,y_1+3\,4\,9\,y_2+5\,4\,7\,y_3\,(252)$.

y_1 es una solución a la ecuación de congruencias:

$7\,9\,x_1\equiv 1(4)\Leftrightarrow 63x_1\equiv 1(4)\Leftrightarrow 3x_1\equiv 1(4)$. Podemos tomar $y_1=3$ ($3\,3=9\equiv 1(4)$).

y_2 es una solución a la ecuación de congruencias:

$4\,9\,x_2\equiv 1(7)\Leftrightarrow 36x_2\equiv 1(7)\Leftrightarrow x_2\equiv 1(7)$. Podemos tomar por tanto $y_2=1$.

y_3 es una solución a la ecuación de congruencias:

$4\,7\,x_3\equiv 1(9)\Leftrightarrow 28x_3\equiv 1(9)\Leftrightarrow x_3\equiv 1(9)$. Podemos tomar por tanto $y_3=1$.

Queda entonces que $x\equiv 2\,7\,9\,3+3\,4\,9+5\,4\,7\,(252)\equiv 378+108+140=626\equiv 122\,(252)$, por lo que $x=122+252k$, $k\in Z$.

11.- Entre 3 grupos de personas se reparten 4 bolsas iguales de aperitivos. Se sabe:

-el primer grupo tiene 5 personas, se reparten 2 bolsas y sobra un aperitivo.

-el segundo grupo tiene 6 personas, se reparte 1 bolsa y sobran 2 aperitivos.

-el tercer grupo tiene 7 personas, se reparte 1 bolsa y sobran 3 aperitivos.

Hallar el posible número de aperitivos de cada bolsa, sabiendo que no llegan a 500.

Solución

Si llamamos x al número de aperitivos de cada bolsa, se sabe que $\left.\begin{array}{l} 2x-1\equiv 0(5) \\ x-2\equiv 0(6) \\ x-3\equiv 0(7) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x\equiv 3(5) \\ x\equiv 2(6) \\ x\equiv 3(7) \end{array}\right\}$. De la primera ecuación sacamos que $x=5t+3$, sustituyendo en la segunda llegamos a que

$5t+3\equiv 2(6)\Rightarrow t\equiv 1(6)\Rightarrow t=6s+1\Rightarrow x=30s+8$, sustituyendo en la tercera llegamos a que $30s+8\equiv 3(7)\Rightarrow s\equiv 1(7)\Rightarrow s=7u+1\Rightarrow x=210u+38$, con $u\in Z$.

Las posibles soluciones son entonces $x=38$, $x=248$, $x=458$.

TEMA 2.- **ANÁLISIS COMBINATORIO**

Contenidos:

1.- Principios aditivo y multiplicativo.

2.- Variaciones, permutaciones y combinaciones.

3.- Sustituciones.

4.- Propiedades y aplicaciones de los coeficientes binómicos.

Objetivos:

Manejar conceptos relacionados con el conteo y aplicarlos a casos reales.

Aplicar los coeficientes binómicos al desarrollo de potencias.

Bibliografía básica:

Los contenidos teóricos de este tema corresponden al capítulo 6 del libro *Matemática Discreta* de Félix García Merayo, excepto el apartado 6.2.

PROBLEMAS

1.- ¿Cuántos números naturales menores que 1000 tienen todas sus cifras distintas? (El conjunto de los números naturales es $N = \{1, 2, 3, ...\}$)

2.- Las placas de matrícula de los vehículos de cierto país constan de cuatro letras de un alfabeto de 25 letras, seguidas de tres cifras. ¿Cuántas placas distintas pueden formarse?

3.- Cinco jóvenes se suben a una furgoneta que tiene siete plazas. ¿De cuántas formas se pueden sentar?

4.- Cuatro profesores intervienen en un congreso durante un día, dos por la mañana y otros dos por la tarde. ¿De cuántas formas se puede programar el congreso?

5.- Un cuestionario consta de veinte preguntas del tipo Verdadero/Falso. Si una persona marca ocho verdaderas y el resto falsas, ¿de cuántas formas distintas puede haberlo hecho?

6.- En una bolsa hay seis bolas distintas: tres bolas blancas, dos rojas y una negra. ¿De cuántas formas se pueden extraer cuatro bolas de manera que haya bolas de los tres colores?

7.- Una frutería dispone de seis tipos de fruta de temporada. ¿De cuántas formas se pueden elegir tres frutas? ¿Y si las tres frutas tienen que ser de diferente tipo?

8.- a) Hallar el número de formas de rellenar un boleto de lotería primitiva.

b) Hallar el número de formas de rellenar un boleto de lotería primitiva, si se elige solamente entre los diez primeros números.

c) Hallar el número de formas de rellenar un boleto de lotería primitiva si los seis números que se eligen son consecutivos.

9.- Se consideran las siguientes sustituciones de S_6 :

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix},\ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Hallar las siguientes sustituciones: $\alpha\,\beta$, β^2 , $\beta\,\alpha$, $\gamma\,\alpha$, $\beta\,\gamma$, $\alpha\,\gamma$, α^{-1} , β^{-1} .

10.- Demostrar que $\binom{k}{2} + \binom{k+1}{2}$ es un cuadrado perfecto para todo $k \geq 2$.

11.- Se desean pintar cuatro sillas diferentes y se dispone de cinco botes de pintura de diferentes colores.

a) ¿De cuántas formas se pueden pintar las sillas de tal manera que cada una tenga un color distinto?

b) ¿De cuántas formas se pueden pintar las sillas, pudiéndose utilizar colores iguales para varias sillas?

12.- En una implementación de un lenguaje de programación, un identificador consta de una sola letra, o de una sola letra seguida de hasta 7 símbolos, que pueden ser letras o dígitos. (Supongamos que no hay distinción entre las letras mayúsculas y minúsculas; hay 26 letras y 10 dígitos). Sin embargo, ciertas palabras clave están reservadas para los comandos; en consecuencia estas palabras clave no pueden usarse como identificadores. Si esta implementación tiene 36 palabras reservadas, ¿cuántos identificadores diferentes son posibles en esta implementación?

13.- ¿Cuántas sucesiones hay de longitud n, de ceros y unos que contengan exactamente 3 ceros?

14.- Resolver el sistema $\begin{cases} \binom{m}{2}+\binom{n}{2}+\binom{m-1}{1}+\binom{n-1}{1}=19 \\ \binom{m}{m-1}=\binom{n}{n-1}+\frac{1}{6}V_{4,2} \end{cases}$

Soluciones a los problemas del tema 2

8.- a) Hallar el número de formas de rellenar un boleto de lotería primitiva.

b) Hallar el número de formas de rellenar un boleto de lotería primitiva, si se elige solamente entre los diez primeros números.

c) Hallar el número de formas de rellenar un boleto de lotería primitiva si los seis números que se eligen son consecutivos.

Solución

a) De 49 números elegimos 6, sin repetir ni importar el orden (importa qué números elijas), luego son $C(49,6)=\dfrac{49!}{6!\,43!}=49\times 47\times 46\times 3\times 44$

b) De 49 números elegimos 10, sin repetir ni importar el orden (importa qué números elijas), luego son $C(10,6)=\dfrac{10!}{6!\,4!}=210$

c) Hay desde 1, …, 6 hasta 44, …, 49, luego hay 44 formas.

9.- Se consideran las siguientes sustituciones de S_6 :

$\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&2&1&5&6&4\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&4&6&1&2&5\end{pmatrix}$ y $\gamma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&3&1&2&6&5\end{pmatrix}$.

Hallar las siguientes sustituciones: $\gamma\,\alpha$, $\beta\,\gamma$, $\alpha\,\gamma$, α^{-1} .

Solución

Se cumple que $\gamma\,\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$,

$\beta\,\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$,

$\alpha\,\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$,

$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

12.- En una implementación de un lenguaje de programación, un identificador consta de una sola letra, o de una sola letra seguida de hasta 7 símbolos, que pueden ser letras o dígitos. (Supongamos que no hay distinción entre las letras mayúsculas y minúsculas; hay 26 letras y 10 dígitos). Sin embargo, ciertas palabras clave están reservadas para los comandos; en consecuencia estas palabras clave no pueden usarse como identificadores. Si esta implementación tiene 36 palabras reservadas, ¿cuántos identificadores diferentes son posibles en esta implementación?

Solución

Identificadores con una sola letra hay 26 (las 26 letras del alfabeto). Con una letra e i símbolos, con $1 \le i \le 7$, hay: por cada forma de elegir la letra, que hay 26, hay $VR(36, i) = 36^i$ formas de elegir los i símbolos (de las 36 letras ó dígitos que hay tomamos i, pudiendo repetir dígitos ó letras e importando el orden, porque son palabras), por lo que en total son 26×36^i formas. Tenemos entonces $26 + 26 \times 36 + ... + 26 \times 36^7 = 26\left(1 + 36 + ... + 36^7\right) = 26\,\frac{36^8 - 1}{35}$ palabras de las que 36 son reservadas, luego hay $26\,\frac{36^8 - 1}{35} - 36$ identificadores.

13.- ¿Cuántas sucesiones hay de longitud n, de ceros y unos que contengan exactamente 3 ceros?

Solución

De los n lugares tenemos que reservar 3 distintos para poner los ceros, sin importar el orden de los lugares sino cuáles elija, luego hay $C(n,3)=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ sucesiones con las condiciones pedidas.

14.- Resolver el sistema $\begin{cases} \binom{m}{2}+\binom{n}{2}+\binom{m-1}{1}+\binom{n-1}{1}=19 \\ \binom{m}{m-1}=\binom{n}{n-1}+\frac{1}{6}V_{4,2} \end{cases}$

Solución

El sistema es equivalente a $\begin{cases} \frac{m(m-1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}+m-1+n-1=19 \\ m-1=n-1+2\Rightarrow m=n+2 \end{cases}$. Sustituyendo la segunda igualdad en la primera, tenemos que $\frac{(n+2)(n+1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}+2n=19\Rightarrow 2n^2+2n+2+4n=38\Rightarrow n^2+3n-18=0\Rightarrow n=\frac{-3+9}{2}=3$ (sólo tomamos la raíz positiva, ya que n es natural), y entonces $m=5$.

TEMA 3: **RELACIONES DE RECURRENCIA**

Contenidos:

1.- Ecuaciones de recurrencia: definición y solución.

2.- Ecuaciones lineales homogéneas.

3.- Ecuaciones lineales no homogéneas.

Objetivos:

Estudiar las posibles ecuaciones que se establecen cuando el resultado en un nivel depende de los resultados en niveles anteriores.

Clasificar, representar y resolver estas relaciones.

Bibliografía básica:

Los contenidos del tema corresponden a:

- Capítulo 5, *Matemática Discreta* de Félix García Merayo.
- Capítulo 4 (apartado 3), *Cálculo I*, Villa, A. de la, López, A. y otros (2ª edic.). Ed. CLAG.
- *Problemas resueltos de Matemática Discreta*, F. G. Merayo, G. Hernández, A. Nevot. 2003

PROBLEMAS

1.- Calcular los cuatro primeros términos de la sucesión a_n definida por: $a_{n+1} = 3\,a_n$ si $n \geq 0$, $a_0 = 5$.

2.- El número de bacterias en un cultivo de laboratorio se triplica cada hora. Plantear una relación de recurrencia para el número de bacterias que hay en el cultivo después de n horas. Si el número inicial de bacterias es 100, ¿cuántas habrá al cabo de 10 horas?

3.- Resolver la relación de recurrencia $a_n + a_{n-1} - 6\,a_{n-2} = 0$ si $n \geq 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$.

4.- Un banco paga un 3 % (anual) con un interés compuesto mensual. Laura invierte 100 euros. ¿Cuánto dinero tiene un año después?

5.- Calcular el número de listas de longitud n formadas con elementos de $\{0, 1, 2\}$ en las que no aparecen 2 ceros consecutivos.

6.- Calcular el valor del determinante $n \times n$: $a_n = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 5 & 7 & 2 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 5 & 7 \end{vmatrix}$.

7.- Sea $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ un conjunto de n números naturales. En el método de la burbuja para ordenar n números, se compara a_n con a_{n-1} y si $a_n \geq a_{n-1}$ no se modifica, pero si $a_n \leq a_{n-1}$ se intercambian los dos números obteniéndose otra lista

que se renombra como la anterior. Se compara a_{n-1} con a_{n-2} y se reitera el proceso. Después de $n-1$ comparaciones, el primer término ocupa la posición a_1.
Si S_n es el número de comparaciones necesarias para ordenar *n* números por este método, se pide encontrar una relación de recurrencia con una condición inicial para S_n y resolverla.

8.- (Torres de Hanoi) Se consideran *n* discos circulares con diferentes diámetros y agujeros en sus centros. Hay 3 espigas, *a*, *b*, y *c* y los discos están apilados en la espiga *a* sin que ningún disco quede sobre otro más pequeño. El objeto es pasar los discos de 1 en 1 de modo que la pila original termine en la espiga *c*. Cada espiga se usará para ubicar de forma temporal los discos, pero no se permite que un disco más grande quede sobre otro más pequeño. ¿Cuál es el mínimo número de movimientos necesarios para mover una pila con *n* discos?
Obtener una relación de recurrencia entre el número de movimientos con $n-1$ discos y con *n* discos. Hallar la solución de dicha relación de recurrencia.

9.- ¿De cuántas formas podemos cubrir de manera exacta un tablero rectangular de tamaño $2\times n$ usando piezas de tamaños 1×2 y 2×2 ?

10.- Un muchacho dispone de n monedas para comprar. Puede comprar palomitas, que cuestan una moneda cada bolsa, y dos tipos de pasteles, que cuestan dos monedas cada uno. ¿De cuántas formas puede gastarse las n monedas?

11.- En un triángulo T_1 se unen mediante segmentos los puntos medios de cada lado, y al triángulo que queda abajo a la izquierda se le llama T_2. Se repite la operación con T_2, y al triángulo que queda abajo a la izquierda se le llama T_3, y así sucesivamente.
Siendo $x_n = \text{área del triángulo}\, T_n$, con $\text{área}(T_1)=1$, se pide hallar una expresión general explícita para x_n.

4.- Un banco paga un 3 % (anual) con un interés compuesto mensual. Laura invierte 100 euros. ¿Cuánto dinero tiene un año después?

Solución

El interés cada mes será de $\frac{3}{12}\%$, luego en el primer mes tendrá un capital de:

$a_1 = a_0 + \frac{3}{1200} a_0 = \left(1 + \frac{1}{400}\right) a_0$, siendo a_0 el capital inicial (100). En el segundo mes tendrá un capital de:

$a_2 = a_1 + \frac{3}{100} a_1 = \left(1 + \frac{1}{400}\right) a_1 = \left(1 + \frac{1}{400}\right)^2 a_0$, y en general, en el mes n tendrá un capital de:

$$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{400} a_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{400}\right) a_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{400}\right)^n 100$$

(es una progresión geométrica), luego un año después tendrá un capital de:

$$a_{12} = \left(\frac{401}{400}\right)^{12} 100 = 103.041$$

7.- Sea $S = \{a_1, a_2, \ldots.., a_n\}$ n números naturales. En el método de la burbuja para ordenar n números, se compara a_n con a_{n-1} y si $a_n \geq a_{n-1}$ no se modifica, pero si $a_n \leq a_{n-1}$ se intercambian los dos números obteniéndose otra lista que se renombra como la anterior. Se compara a_{n-1} con a_{n-2} y se reitera el proceso. Después de $n-1$ comparaciones, el primer término ocupa la posición a_1.

Si S_n es el número de comparaciones necesarias para ordenar n números por este método, se pide encontrar una relación de recurrencia con una condición inicial para S_n y resolverla.

Solución

Se necesita $n-1$ comparaciones para poner el primer número en el primer lugar. Luego hay que aplicar el método a los $n-1$ números mayores, lo que da S_{n-1} comparaciones necesarias, por lo que $S_n = S_{n-1} + n - 1$ si $n > 1$, con $S_1 = 0$.

Tenemos entonces que $S_n = S_1 + \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2}$.

8.- (Torres de Hanoi) Se consideran *n* discos circulares con diferentes diámetros y agujeros en sus centros. Hay 3 espigas, *a*, *b*, y *c* y los discos están apilados en la espiga *a* sin que ningún disco quede sobre otro más pequeño. El objeto es pasar los discos de 1 en 1 de modo que la pila original termine en la espiga *c*. Cada espiga se usará para ubicar de forma temporal los discos, pero no se permite que un disco más grande quede sobre otro más pequeño. ¿Cuál es el mínimo número de movimientos necesarios para mover una pila con *n* discos?

Obtener una relación de recurrencia entre el número de movimientos con $n-1$ discos y con *n* discos. Hallar la solución de dicha relación de recurrencia.

Solución

Si llamamos a_n al mínimo número de movimientos necesarios para mover una pila con *n* discos, vemos que necesitamos a_{n-1} movimientos para mover los $n-1$ primeros discos de *a* a *b*, usando *c* como espiga intermedia, luego 1 movimiento para pasar el disco grande de *a* a *c*, y otros a_{n-1} movimientos para mover los $n-1$ primeros discos de *b* a *c*, usando *a* como espiga intermedia, luego $a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1} = 2\,a_{n-1} + 1$, con $a_1 = 1$.

Para resolver la relación de recurrencia, resolvemos primero la homogénea asociada, $a_n = 2\,a_{n-1}$, progresión geométrica de razón 2, luego su solución general es $a_{nH} = c\,2^n$.

Como el término independiente es constante, buscamos ahora una solución particular de la completa de la forma $a_{nP} = A$, por lo que $A = 2\,A + 1 \Rightarrow A = -1$, y entonces la solución general de la completa es $a_n = a_{nH} + a_{nP} = c\,2^n - 1$. Metiendo la condición inicial, tenemos que $a_1 = c\,2 - 1 = 1 \Rightarrow c = 1$, por lo que $a_n = 2^n - 1$.

10.- En un triángulo T_1 se unen mediante segmentos los puntos medios de cada lado, y al triángulo que queda abajo a la izquierda se le llama T_2. Se repite la operación con T_2, y al triángulo que queda abajo a la izquierda se le llama T_3, y así sucesivamente. Siendo $x_n = \text{área del triángulo} \, T_n$, con $\text{área}(T_1) = 1$, se pide hallar una expresión general explícita para x_n.

Solución

La operación divide T_1 en 4 triángulos de igual área, por lo que $x_2 = \frac{1}{4} x_1$, y en general $x_n = \frac{1}{4} x_{n-1}$ si $n > 1$, con $x_1 = 1$. Esto es una progresión geométrica de razón $\frac{1}{4}$, luego su forma explícita es $x_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} x_1 = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

TEMA 4: **TEORÍA DE GRAFOS**

Contenidos:

1.- Definición, propiedades y clases de grafos.

2.- Matrices binarias.

3.- Grafos especiales, isomorfía de grafos y grafos etiquetados.

4.- Grafos de Euler y de Hamilton.

5.- Algoritmos sobre grafos.

6.- Árboles.

7.- Árbol maximal minimal.

8.- Aplicaciones: punteros, notación algebraica, notación polaca.

9.- Grafos planos.

10.- Coloración de grafos.

Objetivos:

Introducir los principales conceptos de la teoría de grafos, así como algunas aplicaciones.

Bibliografía básica:

Los contenidos corresponden a los capítulos 7 (excepto 7.8), 8 y 9 de *Matemática Discreta* de F. García Merayo.

PROBLEMAS

1.- a) A una fiesta asisten 20 personas. ¿Es posible que cada una de ellas conozca a un número diferente de invitados?

b) Probar que todo grafo simple con n vértices, $n \geq 2$, tiene al menos dos vértices del mismo grado.

2.- La matriz de adyacencia de un digrafo de vértices a, b, c y d es la siguiente:

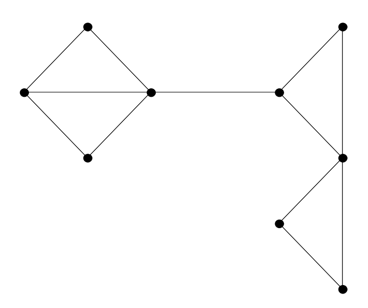
$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Haciendo uso de las potencias de M, probar que:

a) No existen caminos de a a c, ni de a a d.

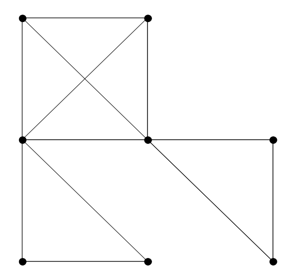
b) No hay caminos de b a ningún vértice.

3.- Determinar si en los siguientes grafos se puede dar sentido a las aristas de manera que el digrafo resultante sea fuertemente conexo. (Sólo se puede dar un sentido a cada arista).

a)



b)



4.- Dibujar los grafos simples no isomorfos de 4 vértices.

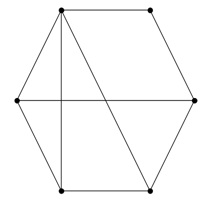
Indicación: agruparlos según el número de aristas.

5.- ¿Para qué valores de n los grafos K_n y $K_{n,n}$ son eulerianos?

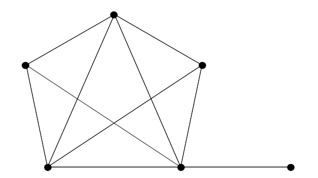
6.- Elena y Dora invitan a 10 amigos a cenar. En el grupo de 12 personas, cada una conoce al menos a otras 6. Demostrar que se pueden sentar los 12, alrededor de una mesa circular, de modo que todos conozcan a las 2 personas que están sentadas a su lado.

7.- Demostrar que son planos los siguientes grafos y comprobar la fórmula de Euler para cada uno de ellos.

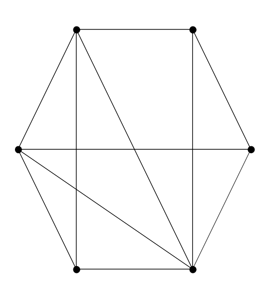
a)



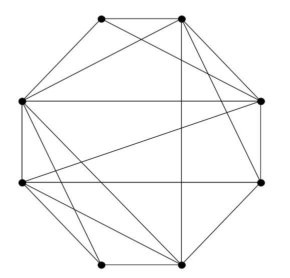
b)



c)

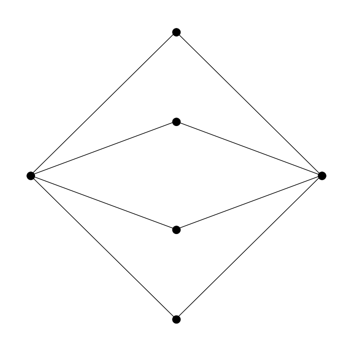


d)

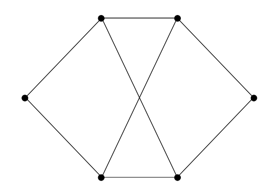


8.- Hallar el número cromático de los siguientes grafos:

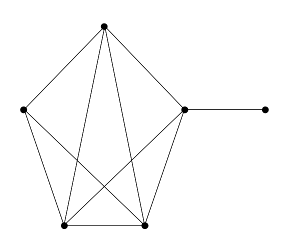
a)



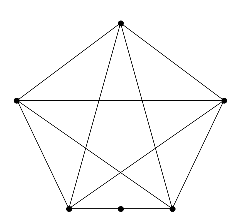
b)



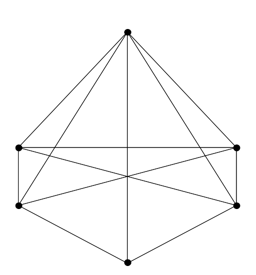
c)



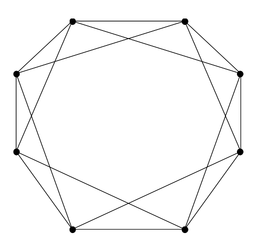
d)



e)

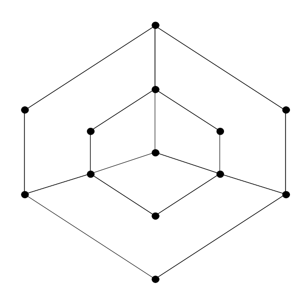


f)

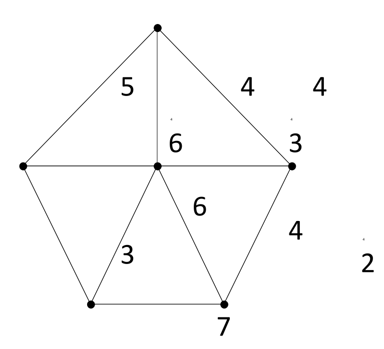


9.- Dibujar todos los árboles con 7 vértices no isomorfos y con vértices de grado menor que 5.

10.- Aplicar el procedimiento de búsqueda en anchura para encontrar un árbol generador del siguiente grafo:



11.- Construir, utilizando el algoritmo de Kruskal, un árbol generador mínimo del siguiente grafo ponderado:



12.- Dada la expresión $(3(x^2y+y^2x))(z-1)$, representar su árbol correspondiente. Obtener también su notación polaca prefija. (Indicar la potencia por exp y el producto por $*$).

13.- Se tiene un árbol con 21 vértices que tiene 15 hojas, vértices de grado 3, vértices de grado 5 y 1 vértice de grado 6. Hallar el número de vértices que tiene de grado 3 y de grado 5.

Bibliografía

Emilio Bujalance, *Elementos de matemática discreta*, Sanz y Torres, 2005

Félix García Merayo, *Matemática discreta*, Ediciones Paraninfo, S.A., 2005

Seymour Lipschutz, *2000 problemas resueltos de matemática discreta*, McGraw-Hill, 2004

Kenneth Rosen, *Matemática discreta y sus aplicaciones*, McGraw-Hill, 2004

NOTAS

NOTAS

NOTAS

CUADERNO



Cuadernos.ijh@gmail.com
info@mairea-libros.com

